AULA 09
INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS ESPECTRAIS
PTC 5525 (13/11/2025)

Osvaldo Guimarães

Pesos p/ interpolação baricêntrica

Chebyshev-Lobatto

$$x_k = -\cos\left(k\pi / n\right), \quad k = 0,1,\ldots,n \text{ então:}$$

$$\begin{cases} w_k = \left[\frac{1}{2}, -1, 1, -1, \ldots, -\frac{1}{2}\right] & n \text{ ímpar} \\ w_k = \left[-\frac{1}{2}, 1, -1, 1, \ldots, -\frac{1}{2}\right] & n \text{ par} \end{cases}$$

Fourier com N pontos em $[0,2\pi)$

$$x_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0,1,\ldots,N-1.$$

$$w_k = \left(-1\right)^k$$

Base Legendre-Lobatto

$$f(x) = c_0 P_0 + c_1 P_1 + \ldots + c_n P_n, \qquad P_k = P_k(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f\, P_k dx = \int_{-1}^{1} c_k P_k^2 dx = c_k \frac{2}{2k+1} \qquad \text{ortogonalidade} \Rightarrow \quad c_k = \frac{2k+1}{2} \int f\, P_k dx$$

A integral pode ser avaliada por Gauss-Lobatto, levando ao produto matricial:

$$c_k = \underbrace{\operatorname{diag}\left(\frac{2k+1}{2}\right) B^T \operatorname{diag}(w_k)}_{\text{inversa}} \cdot f_k$$

Ajuste final: $B^{-1}(n+1,:) = B^{-1}(n+1,:)\dfrac{n}{2n+1}$

$$D_{\text{Cheby}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo elementar

$$y'(x) = 4x \quad y(1) = 1 \quad x \in [-1,1]$$

$$D\hat{y} = 4T_1 \quad \text{e} \quad [1\ 1\ 1\ 1\ 1] \cdot \hat{y} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \hat{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \langle B | C \rangle,$$

$$f(1) = \langle B(1) | C \rangle, \quad C = \hat{f}$$

$$\hat{y} = [0\ 0\ 1\ 0\ 0]^T = T_2$$

Construção da Inversa Legendre-Lobatto

$$f(x) = c_0 P_0 + c_1 P_1 + \ldots + c_n P_n, \qquad P_k = P_k(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f\, P_k dx = \int_{-1}^{1} c_k P_k^2 dx = c_k \frac{2}{2k+1} \qquad \text{ortogonalidade} \Rightarrow \quad c_k = \frac{2k+1}{2} \int f\, P_k dx$$

A integral pode ser avaliada por Gauss-Lobatto, levando ao produto matricial:

$$c_k = \underbrace{\operatorname{diag}\left(\frac{2k+1}{2}\right) B^T \operatorname{diag}(w_k)}_{\text{inversa}} \cdot f_k$$

Ajuste final: $B^{-1}(n+1,:) = B^{-1}(n+1,:)\dfrac{n}{2n+1}$

Resolva pelo método de Newton

no grid de Chebyshev:

$$y''\cdot y + y'^2 - 2e^{-2x} = 0 \qquad x \in [-1,1] \subset \mathbb{R}$$

$$y(-1) = e \quad y(1) = e^{-1}$$

Utilize uma expansão com 25 coeficientes e

aproximação inicial $y_{\text{inicial}} = [1,1,\ldots,1]^T$

Solução: $y(x) = e^{-x}$

```
%% ODE 2 y(2)*y + (y(1))^2 = 2*exp(-2*x)  Sol: y = exp(-x);
 n = 18;
  bc = [exp(1),exp(-1)];

  xs = - cos( (0:n).'*pi/n );
  D = Generalized_Diff_Mat(xs); D2 = D^2;

  Ibb = eye(n+1); Ibb([1,n+1],:) = [];

%% Sistema de equações // dado u
J = zeros(n+1); J(n,1) = 1; J(n+1,n+1) = 1;
%%  Guess
ca = exp(-1)/2-exp(1)/2;
u = ca*(xs+1) + exp(1);
%%
  change = 1; it = 0;
%%  Loop
  while change > 1e-10     % fixed-point iteration
      % Jacobian :

      J(1:n-1,:) = Ibb*(diag(D2*u)+diag(u)*(D2) ...
                   + 2*diag(D*u) );


      %% System for given u --> F(u)
      r =Ibb*( (D2*u).*u + (D*u).^2 - 2*exp(-2*xs) );

      r = [r;u(1)-bc(1);u(n+1)-bc(2)];

      du  = -J\r; du([1,n+1]) = 0;
      unew = u + du;

      change = norm(du);
        u = unew; it = it+1;
        disp(int2str(it));
  end
```

Verificação Reversa

$$y''\cdot y + y'^2 - 2e^{-2x} = 0 \qquad x \in [-1,1] \subset \mathbb{R} \quad y(-1) = e \quad y(1) = e^{-1}$$

$$G(x) = \frac{-y'^2 + 2e^{-2x}}{y} = f^R_{xx} \Rightarrow f^R = \iint G\,dx + p(x),\ \text{onde}\ \ p = \alpha x + \beta$$

Sendo $f^* = \iint G\,dx$, temos:

$$\begin{cases} f^*(-1) + \alpha\cdot(-1) + \beta = y(-1) \\ f^*(+1) + \alpha\cdot(+1) + \beta = y(+1) \end{cases} \Rightarrow \quad \text{obtém } \alpha \text{ e } \beta$$

Estimativa de erro: $\sigma_{\text{rel}} = \dfrac{\left\| y - f^R \right\|_\infty}{\left\| y \right\|_\infty}$

Mapas bijetores (Conforme)

$$f(x)=\sqrt{1-x^2} \qquad x\in[-1,1]\subset\mathbb{R}$$

Na variável x a convergência não é exponencial.

$$c_0=\frac{1}{\pi}\cdot 2, \qquad c_{2k}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}T_k\,dx=\frac{4}{\pi\left(1-(2k)^2\right)} \quad \forall k>1, \ \text{portanto}$$

$$\pi\sqrt{1-x^2}=\frac{4}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{1-4k^2}T_{2k} \quad .$$

Para $x=0$, sabendo que $T_{2k}(0)=(-1)^k$, obtemos a série

$$\pi=2+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-4k^2}$$

Mapas bijetores

Para $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, podemos usar o mapa:

$$x=\sin\left(\frac{\pi}{2}v\right)\Rightarrow \quad v\in\Omega=[-1,1].$$

A função $\sin\left(\frac{\pi}{2}v\right)$ é estritamente crescente em Ω.

Obtemos então: $g(v)=f(x(v))=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}v\right)\right|= \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}v\right)$, pois $g(v)\geq 0$ em Ω.

A função $g(v)=\cos\left(\frac{\pi}{2}v\right)$ é indefinadamente diferenciável no intervalo.

Mapas bijetores

Etapas para uso do Mapa Confome

1. Discretizamos v, em pontos de Cheby-Lobatto
2. Obtemos a aproximação espectral para $g\left(v\right)$.
3. Calculamos $x = \sin\left(\frac{\pi}{2}v\right)$
4. Finalmente, temos $f\left(x\right)=g\left(v\right)$ e podemos analisar a margem de erro, plotar gráficos etc.

Autovalores e autovetores

Equação com $x \in [-1,1] \subset \mathbb{R}$

$y'' + k^2 y = 0, \qquad y(\pm 1) = 0$

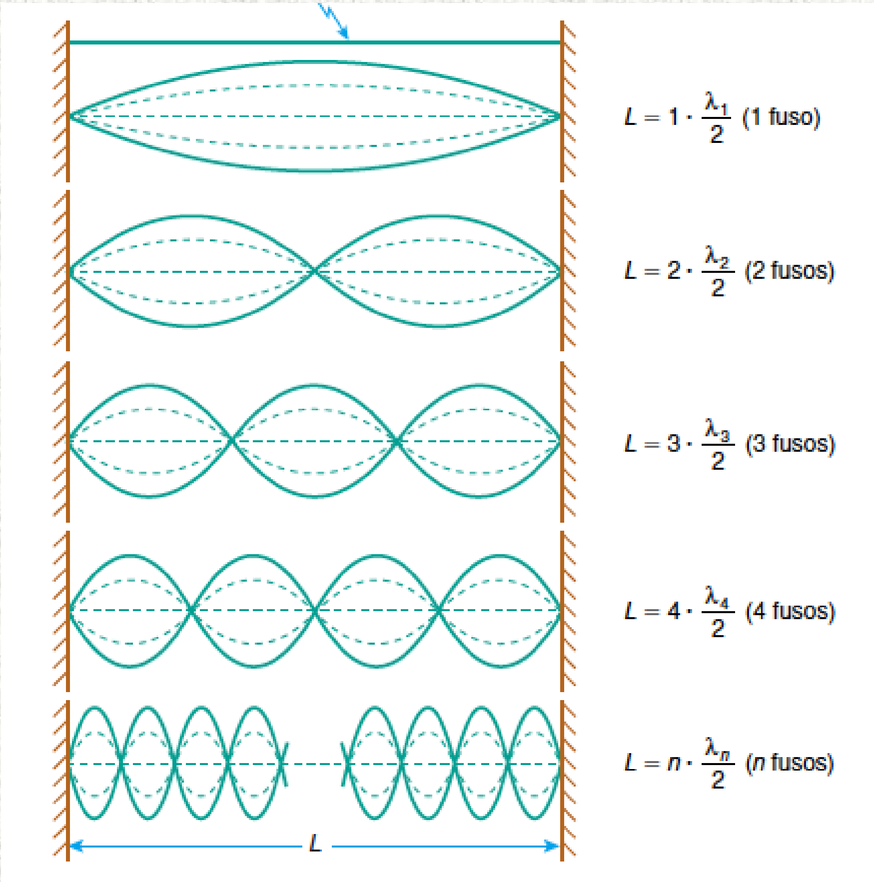
$y'' = -k^2 y$

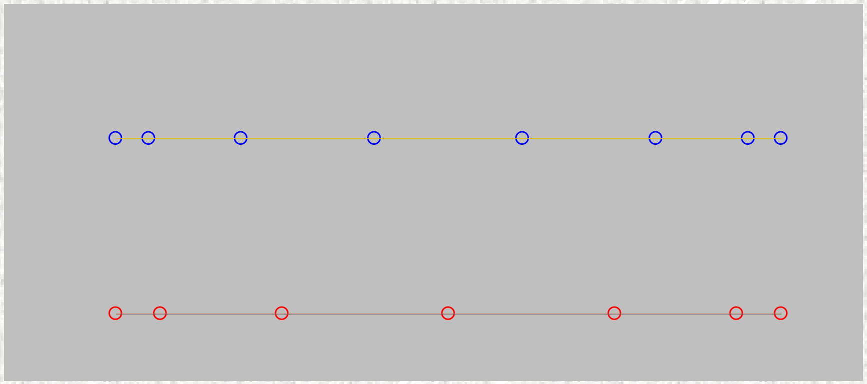
Tem solução trivial!

```
% p15.m - solve eigenvalue BVP u_xx = lambda*u, u(-1)=u(1)=0

  N = 36; [D,x] = cheb(N); D2 = D^2; D2 = D2(2:N,2:N);
  [V,Lam] = eig(D2); lam = diag(Lam);
  [foo,ii] = sort(-lam);              % sort eigenvalues and -vectors
  lam = lam(ii); V = V(:,ii); clf
  for j = 5:5:30                      % plot 6 eigenvectors
    u = [0;V(:,j);0]; subplot(7,1,j/5)
    plot(x,u,'.','markersize',12), grid on
    xx = -1:.01:1; %uu = polyval(polyfit(x,u,N),xx);
    uu = Bary_Cheby(u,-xx);
    line(xx,uu), axis off
    text(-.4,.5,sprintf('eig %d =%20.13f*pi^2/4',j,lam(j)*pi^2/4))
    text(.7,.5,sprintf('%4.1f  ppw', 4*N/(pi*j)))
  end
```

Pontos por comprimento de onda





$$\begin{cases} n \text{ par} & \Delta x_{\text{máx}} = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \simeq \frac{\pi}{n} \\ n \text{ ímpar} & \Delta x_{\text{máx}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \simeq \frac{\pi}{n} \end{cases}$$

Temos $\lambda_j = \frac{2L}{j}$, como $L = 2$: $\lambda_j = \frac{4}{j}$

? Demonstrar

Assim, $\frac{\lambda}{\Delta x_{\text{máx}}} = \frac{4}{j} \cdot \frac{n}{\pi} \Rightarrow \qquad ppw = \frac{4n}{\pi\, j}$

Spectral p/ PDEs bidimensionais

Operador vec(M)

$$\text{Se } M = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{vec}(M) = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta

$$\text{Se } A = a_{i,j} \quad A^T = a_{j,i}$$

Propriedades

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$\left(AB\right)^T = B^T A^T$$

$$M_{p \times q} = m_{i,j}$$

$$B = \text{vec}(M) \quad b_k = m_{(j-1)p+i,j}$$

$$\text{No Matlab, vec}(M) = M(:);$$

Osvaldo Guimarães

Produto de Kronecker

If **A** is an $m \times n$ matrix and **B** is a $p \times q$ matrix, then the Kronecker product **A** ⊗ **B** is the $pm \times qn$ block matrix:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 0 & 1\times 5 & 2\times 0 & 2\times 5 \\ 1\times 6 & 1\times 7 & 2\times 6 & 2\times 7 \\ 3\times 0 & 3\times 5 & 4\times 0 & 4\times 5 \\ 3\times 6 & 3\times 7 & 4\times 6 & 4\times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}.$$

Matlab: $A \otimes B = \mathrm{kron}\left(A, B\right);$

Propriedades

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C},$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \otimes \mathbf{A} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{A},$$

$$(k\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}),$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}),$$

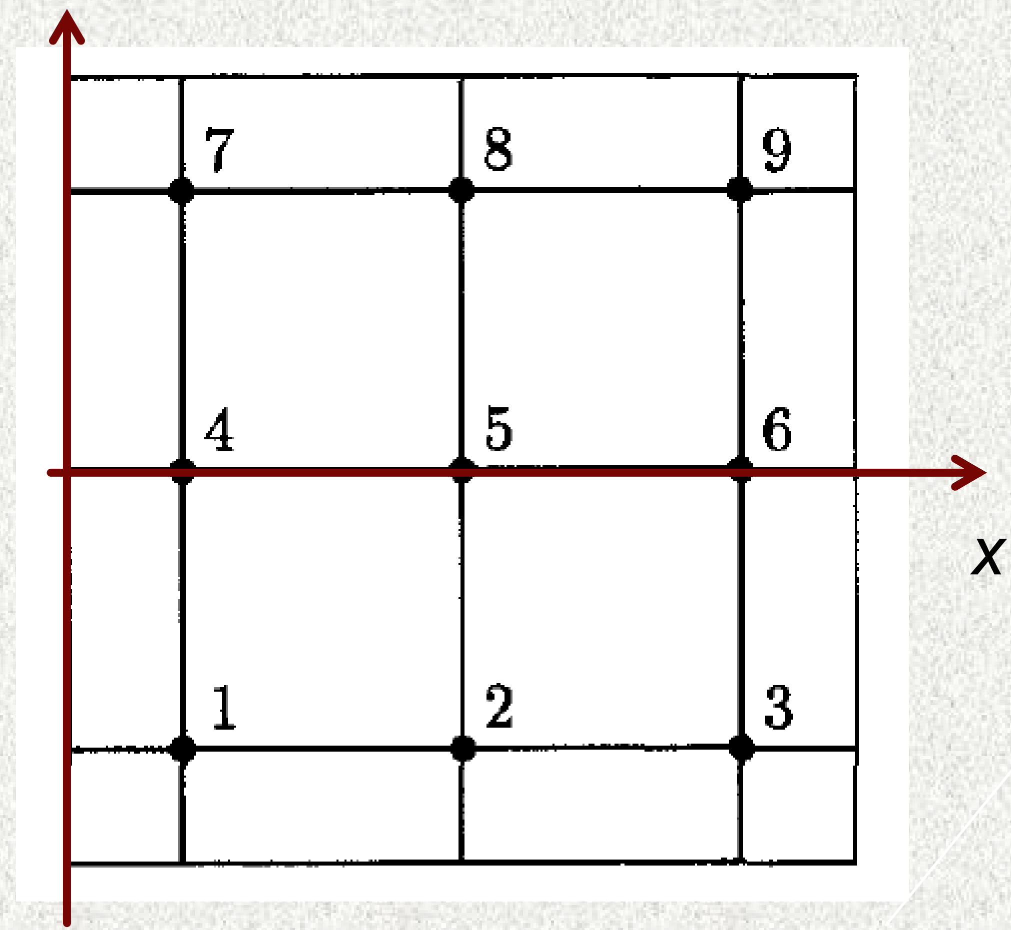
$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{0},$$

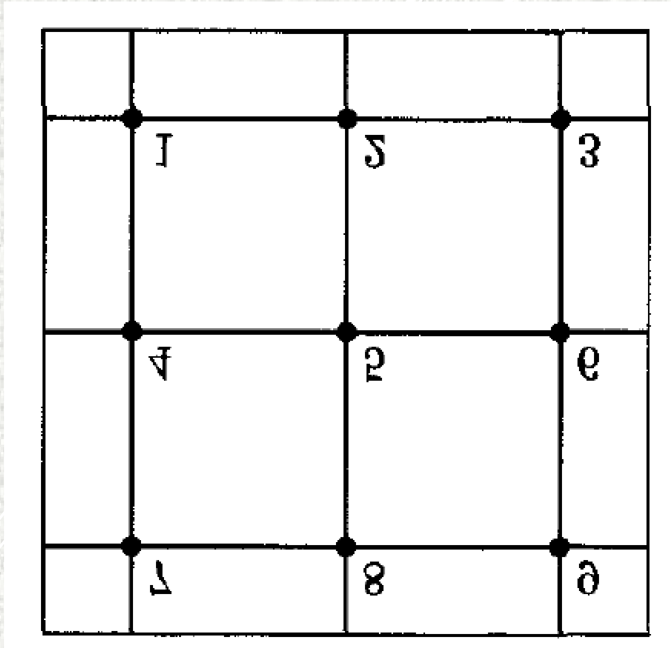
$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}).$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}.$$

$$\mathrm{vec}\left(AXB\right) = \left[B^T \otimes A\right] \cdot \mathrm{vec}\left(X\right)$$

Physical values





Matrix position

Como aplicar a diferenciação matricial para uma matriz *M* do grid da função?

Os valores da função em *y* são representados nas colunas.

Assim, $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = D_y \cdot M.$$

Os valores da função em *x* são representados nas linhas.

Assim, $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \left(D_x \cdot M^T\right)^T = M \cdot D_x^T$$

Considere: $\Delta F = f\left(x,y\right) \quad \left(x,y\right)\in\left[-1,1\right]^2 \subset \mathbb{R}^2$

Discretizado espectralmente, o problema fica:

$$D_y^2 F + F\left(D_x^2\right)^T = f$$

Modificar p/ que F seja a matriz central

$$D_y^2 F I_x + I_y F\left(D_x^2\right)^T = f$$

Equação de Sylvester: $AX + XB = C$

$$\mathrm{vec}\left(D_y^2 F I_x\right) + \mathrm{vec}\left(I_y F\left(D_x^2\right)^T\right) = \mathrm{vec}\left(f\right)$$

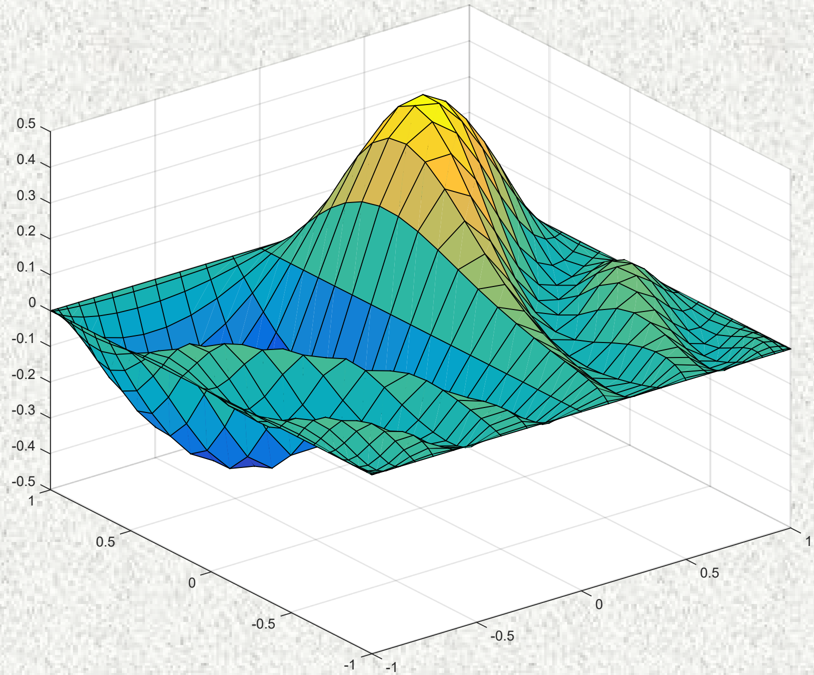
$$\left[I_x \otimes D_y^2\right]\cdot \mathrm{vec}\left(F\right) + \left[D_x^2 \otimes I_y\right]\cdot \mathrm{vec}\left(F\right) = \mathrm{vec}\left(f\right)$$

$$\underbrace{\left[I_x \otimes D_y^2 + D_x^2 \otimes I_y\right]}_{S}\cdot \mathrm{vec}\left(F\right) = \mathrm{vec}\left(f\right) \rightarrow \text{ Sistemar linear}$$

Programa 16 – pág. 70

$$\Delta F = 10 \cdot \sin\left[8x\left(y-1\right)\right] \quad \left(x,y\right) \in \left[-1,1\right]^2 \subset \mathbb{R}^2$$

$$F = 0 \text{ no contorno}$$



Tarefa – Aula 09

Traduzir a versão do livro para Julia e comparar resultados. Analisar a diferença para diferentes discretizações.