

Total Lagrange formuláció a LowLevelFEM-ben

Gyenge alak és operátor-alapú implementáció

1 Kiinduló probléma (Total Lagrange)

A referencia-konfigurációban (Ω_0) felírt egyensúlyi egyenlet:

$$\text{Div } \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_0$$

ahol

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}.$$

Peremfeltételek:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_{u,0}, \quad \mathbf{P}\mathbf{N} = \mathbf{t}_0 \quad \text{on } \Gamma_{t,0}.$$

—

2 Gyenge alak

A virtuális elmozdulás $\delta \mathbf{u}$ alkalmazásával:

$$\int_{\Omega_0} \delta \mathbf{F} : \mathbf{P} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_0 \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{t,0}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_0 \, d\Gamma_0,$$

ahol

$$\delta \mathbf{F} = \nabla_0 \delta \mathbf{u}.$$

Ez az egyenlet a nemlineáris reziduál:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

—

3 Newton-iteráció

Newton-módszerrel:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^k) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{u}^k) - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}^k),$$

ahol a teljes tangens:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}} - \mathbf{K}_{\text{ext}}.$$

—

4 Operátor-alapú bontás a LowLevelFEM-ben

A LowLevelFEM-ben a gyenge alak térfogati és felületi tagjai különálló, "buta" operátorokként jelennek meg. A nemlinearitás kizárólag a mezőkön (pl. \mathbf{F} , \mathbf{S} , \mathbf{P}) keresztül lép be.

4.1 poissonMatrixVector

Gyenge alakbeli eredet

$$\int_{\Omega_0} \nabla_0 \delta \mathbf{u} : \mathbf{S} : \nabla_0 \mathbf{u} \, d\Omega_0$$

Szerep

- geometriai merevség,
- II. PK-feszültséggel súlyozott gradiens–gradiens tag,
- térfogati integrál.

Megjegyzés A függvény teljes másodrendű tenzort (nem Voigt-formát) használ, így közvetlenül alkalmas nagy alakváltozások feladataira.

4.2 gradDivMatrixF

Gyenge alakbeli eredet

$$\int_{\Omega_0} (\nabla_0 \cdot \delta \mathbf{u}) \lambda (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega_0, \quad \text{deformált konfigurációhoz húzva } \mathbf{F}\text{-fel.}$$

Szerep

- anyagi tangens volumetrikus része,
 - izotrop anyag λ paramétere,
 - \mathbf{F} -függő (nagy alakváltozás).
-

4.3 poissonMatrixSymGradF

Gyenge alakbeli eredet

$$\int_{\Omega_0} 2\mu \delta \mathbf{E} : \mathbf{E} \, d\Omega_0, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u}^T \mathbf{F}).$$

Szerep

- anyagi tangens deviátoros része,
 - izotrop anyag μ paramétere,
 - szimmetrikus Green–Lagrange-alapú forma.
-

4.4 internalForceTL

Gyenge alakbeli eredet

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{N} : \mathbf{P} \, d\Omega_0.$$

Szerep

- nemlineáris belső erővektor,
- minden Newton-iterációban újraszámolandó,
- térfogati integrál.

Megjegyzés A First Piola–Kirchhoff feszültség mezőként kerül be, így az anyagmodell teljesen kívül marad.

4.5 externalTangentFollowerTL

Gyenge alakbeli eredet Follower terhelés esetén:

$$\mathbf{t}_0 = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{t},$$

$$\mathbf{K}_{\text{ext}} = \int_{\Gamma_{t,0}} \mathbf{N}^T \frac{\partial(J\mathbf{F}^{-T})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{t} \, d\Gamma_0.$$

Szerep

- külső erők konzisztens Newton-tangense,
- kizárólag felületi integrál,
- csak follower load esetén nem nulla.

Megjegyzés Dead load esetén ez a mátrix zérus, és a meglévő `loadVector` elegendő.

5 Összefoglaló táblázat

LowLevelFEM függvény	Gyenge alak	Integrál	Newton-tag
<code>poissonMatrixVector</code>	\mathbf{K}_{geo}	Ω_0	<i>igen</i>
<code>gradDivMatrixF</code>	\mathbf{K}_{mat}	Ω_0	<i>igen</i>
<code>poissonMatrixSymGradF</code>	\mathbf{K}_{mat}	Ω_0	<i>igen</i>
<code>internalForceTL</code>	\mathbf{f}_{int}	Ω_0	<i>igen</i>
<code>externalTangentFollowerTL</code>	\mathbf{K}_{ext}	$\Gamma_{t,0}$	<i>igen</i>

6 Záró megjegyzés

A bemutatott struktúra lehetővé teszi, hogy:

- kis és nagy alakváltozás azonos operátorokra épüljön,
- az anyagmodell és a geometria szétváljon,
- a Newton-iteráció konzisztens maradjon.

A LowLevelFEM filozófiája szerint az operátorok *minimális tudásúak*, míg a fizikai nemlinearitás a mezőkön keresztül jelenik meg.